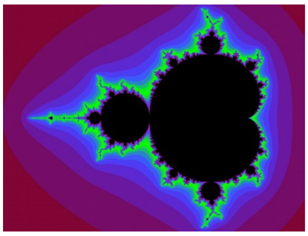


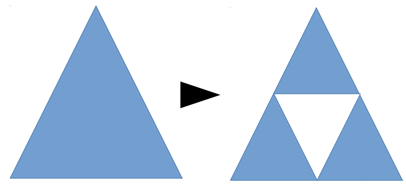
Fraktale

weitere Experimente unter
forschen.Tutorium-Berlin.de

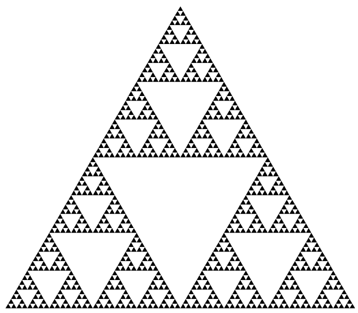
Nachhilfe-TUTORIUM ist ein Unternehmen der Gruppe
TUTORIUM Berlin Hasenmark 5 in 13585 Berlin

Fraktal bezeichnet bestimmte natürliche oder künstliche Gebilde oder geometrische Muster die ein hohes Maß an Selbstähnlichkeit aufweisen. Das ist beispielsweise der Fall, wenn ein Objekt aus mehreren verkleinerten Kopien seiner selbst besteht.

Sierpinski-Dreieck
Ein einfaches Beispiel für ein Fraktal ist das Sierpinski-Dreieck. Die Figur beginnt mit einem Dreieck. Dann teilt man das Dreieck in vier gleich große und zum Ausgangsdreieck ähnliche Dreiecke deren Eckpunkte die Seitenmittelpunkte des Ausgangsdreiecks sind. Die drei äußeren Dreiecken sind dann Teil des Fraktals während das mittlere Teildreieck nicht zum Fraktal gehört.
In der nächsten Wiederholung zerlegt man alle Dreiecke die zum Fraktal gehören auf die gleiche Art wie das erste Dreieck. Diese Regel lässt sich beliebig oft wiederholen.

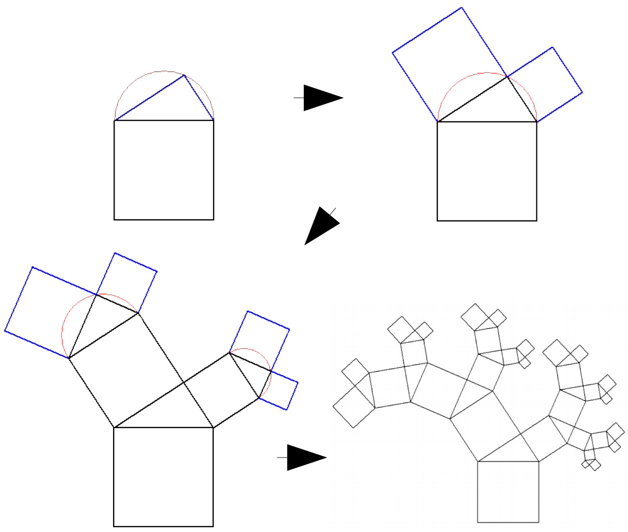


Regel des Sierpinski-Dreiecks



Sierpinski-Dreieck, Stufe 7

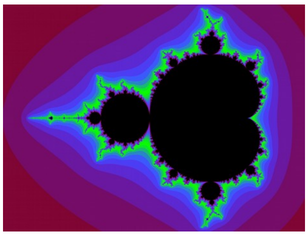
Pythagoras-Baum
Das ursprüngliche Verfahren zum Erstellen eines Pythagoras-Baums basiert auf dem Satz des Pythagoras, in dem auf ein Quadrat zwei weitere, kleinere Quadrate im rechten Winkel angeordnet werden. Durch den rechten Winkel des eingeschlossenen Dreiecks bleibt die Gesamtfläche jeder Ebene gleich, daher ist die Fläche des Grundelementes (Stammes) genau so groß wie die Summe der Fläche aller äußeren Elemente (Blätter).
Je nachdem wie man das Seiten Verhältnis des Dreieckes wählt entstehen unterschiedliche Bäume. Eine Variante dieses Baumes verwendet zudem Rechtecke statt des Quadrate (die Flächenregel von oben stimmt dann natürlich nicht mehr) oder wählt verschiedene Stammteilungsverhältnisse für die Dreiecke.



Konstruktion es Pytagoras-Baums

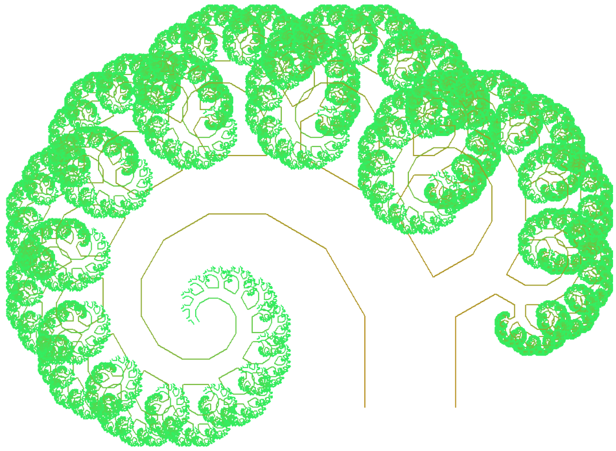
TUTORIUM Berlin
Nachhilfe -TUTORIUM
Inhaber u. Pädagogischer Leiter: **Holger Schackert**
Diplom-Mathematiker, Lerntherapeut,
Psychologischer Berater u. Personal Coach
Hasenmark 5 in 13585 Berlin-Spandau, **Büro: Gartenhaus 1.Etage**

Anmeldung, Beratung und Informationen:
Montag - Freitag: 14.30-17.00 Uhr
und / oder nach Vereinbarung unter
☎: **030 – 85018820** und 030 – 353 053 20
www.Tutorium-Berlin.de E-Mail: info@tutorium-berlin.de
www.Nachhilfe-Tutorium.de E-Mail: info@nachhilfe-tutorium.de

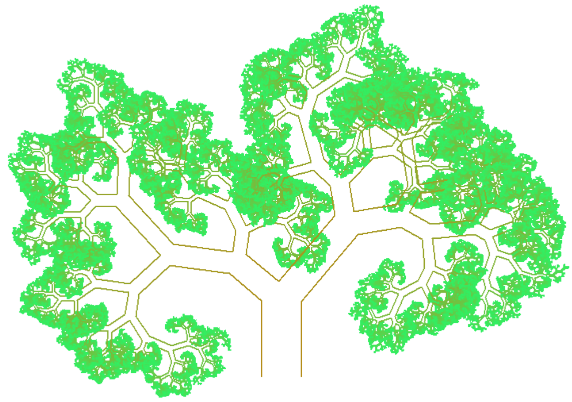


Fraktale

weitere Experimente unter
forschen.Tutorium-Berlin.de



Pythagoras-Baum, Stufe 19



Baum mit zufälliger Stammlängen und zufällige Stammteilungsverhältnisse

Romanesco

Fraktale in der Natur

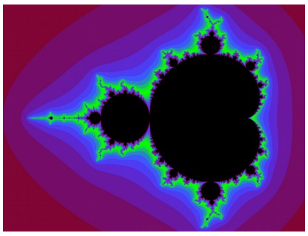
Fraktale Erscheinungsformen findet man auch in der Natur. Dabei ist jedoch die Anzahl der Stufen von selbstähnlichen Strukturen begrenzt und beträgt oft nur drei bis fünf. Typische Beispiele aus der Biologie sind die fraktalen Strukturen bei der grünen Blumenkohlzüchtung Romanesco und bei den Farnen

Mathematische Fraktale

Neben der geometrisch definierten Fraktalen gibt es auch solche die über Funktionen erzeugt werden. Zu den bekanntesten Fraktalen dieser Art gehört die Mandelbrot-Menge.
Die Mandelbrot-Menge ist in den komplexen Zahlen definiert.
Anmerkung:

> Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung des Zahlenbereich der reellen Zahlen derart, dass die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar wird. Dazu besteht jede Zahl aus einem reellen Anteil *a* und einem imaginären Anteil *b*, auch geschrieben als *a*+*b*i. Es handelt sich trotz dieser Schreibweise nicht um eine einfache Addition, so dass spezielle Rechenregeln zu beachten sind. Beispiel: Addition der komplexen Zahlen $c_1=3+2i$ und $c_2=10+5i$:
> $c_1+c_2=(3+2i)+(10+5i)=(3+10)+(2+5)i=13+7i$

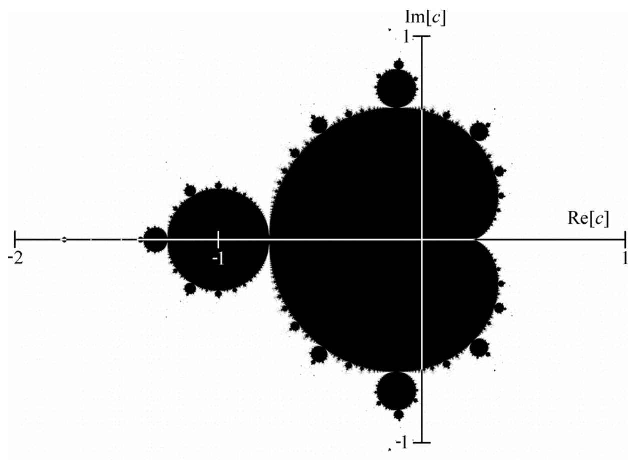
Für jede komplexe Zahl c kann man eine rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen z_0, z_1, z_2 usw. berechnen mit $z_0=0$ und $z_{n+1}=z_n^2+c$. Die Mandelbrot-Menge ist dann die Menge aller Zahlen c für die diese Folge beschränkt bleibt, das heißt, der Betrag der Folgenglieder wächst nicht über alle Grenzen.



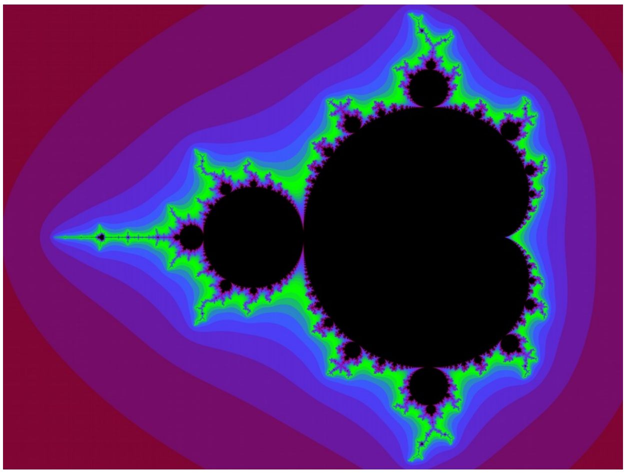
Fraktale

weitere Experimente unter
forschen.Tutorium-Berlin.de

Die graphische Darstellung dieser Menge erfolgt in der komplexen Ebene, das heißt jeder Punkt (x,y) in der Darstellung repräsentiert eine komplexe Zahl c=x+yi. Ist diese Zahl Teil der Menge wird der Punkt schwarz dargestellt, sonst bleibt er weiß. Alternativ kann man auch für alle komplexen Zahlen die nicht Teil der Mandelbrotmenge sind angeben wie schnell sie divergieren, d.h. nach wie vielen Folgegliedern die Zahlen der Folge größer als ein bestimmter Grenzwert ist. In der Abbildung unten zeigen Beispielsweise die Rottöne ein sehr schnelles Wachstum der Zahlenfolge, während die Grünen vergleichsweise langsam Wachsen. Die Farben sind allerdings willkürlich gewählt.



Die schwarzen Punkte sind komplexe Zahlen die Teil der Mandelbrotmenge sind.



Mandelbrotmenge und farbliche Darstellung der Divergenz